



۱. ثابت کنید زبان‌های منظم تحت عملگر زیر بسته‌اند.

$$L/R = \{x \mid \exists y \in R : xy \in L\}$$

۲. اگر زبان L منظم باشد، نشان دهید به ازای هر رشته‌ی w زبان‌های زیر نیز منظم‌اند.

$$L_1 = \{x \mid xw \in L\} \quad (\text{الف})$$

$$L_2 = \{x \mid wx \in L\} \quad (\text{ب})$$

۳. نشان دهید زبان‌های منظم تحت عملگر زیر بسته‌اند.

$$\sqrt[k]{L} = \{x \mid x^k \in L\}$$

۴. فرض کنید می‌دانیم مسئله‌ی توقف تصمیم‌ناپذیر است. نشان دهید مسئله‌ی تعیین هم‌ارزی دو ماشین تورینگ نیز تصمیم‌ناپذیر است.

۵. فرض کنید می‌دانیم مسئله‌ی توقف تصمیم‌ناپذیر است. نشان دهید مسئله‌ی تعیین این که آیا یک ماشین تورینگ نوار خالی را می‌پذیرد نیز تصمیم‌ناپذیر است.

۶. اگر زبان L منظم باشد، نشان دهید زبان زیر نیز منظم خواهد بود.

$$L_{\text{half}} = \{x \mid \exists y, xy \in L, |x| = |y|\}$$

۷. تصمیم‌پذیری مسائل زیر را بررسی کنید.

$$L_1 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ یک ماشین تورینگ است که حداقل یک رشته را می‌پذیرد}\}$$

$$L_2 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ یک ماشین تورینگ است که حداقل } k \text{ رشته را می‌پذیرد}\}$$

۸. قضیه‌ی رایس می‌گوید اگر R یک ویژگی زبانی نابديهی از زبان‌های تورینگ‌پذیر باشد، آنگاه مسئله‌ی P_R به شرح زیر تصمیم‌ناپذیر است:

$$P_R = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in R\}$$

به عبارت دیگر: «آیا ماشین تورینگ M ویژگی R را دارد؟» تصمیم‌ناپذیر است.

(الف) قضیه‌ی رایس را ثابت کنید.

(ب) با توجه به قضیه‌ی رایس، نشان دهید مسئله‌ی «به ازای یک ماشین تورینگ M ، آیا حداقل یک رشته در $L(M)$ وجود دارد؟» تصمیم‌ناپذیر است.

۹. ثابت کنید زبان زیر تصمیم‌ناپذیر است:

$$L = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ منظم است}\}$$

۱۰. ماشین حالت متناهی $A = (Q, \Sigma, f, q_0, F)$ را در نظر بگیرید. رشته‌ی $w \in \Sigma^*$ را یک رشته‌ی همگام‌ساز می‌نامیم اگر:

$$\forall q_1, q_2 \in Q : f(q_1, w) = f(q_2, w)$$

الگوریتمی برای تشخیص وجود رشته‌ی همگام‌ساز در یک ماشین حالت متناهی قطعی داده شده ارائه دهید.

۱۱. نشان دهید زبان‌های منظم تحت عملگر زیر بسته‌اند.

$$L \text{ shuffle } R = \{ \omega \mid \exists y \in L, x \in R; \omega_{2k} = x_k, \omega_{2k+1} = y_k \}$$

۱۲. اگر زبان L منظم باشد نشان دهید زبان‌های زیر نیز منظم خواهند بود.

(الف) $L_{\text{minimal}} = \{x \mid \text{هیچ زیررشته‌ی متوالی از } x \text{ در } L \text{ نباشد}\}$

(ب) $L_{\text{edit}} = \{x \mid \exists y \in L, \text{رشته‌ی } x \text{ را به دست آورد}\}$

۱۳. برای هر یک از زبان‌های زیر ماشین تورینگی توصیف کنید که آن زبان را بپذیرد.

(الف) $L_1 = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$

(ب) $L_2 = \{x \# y \mid \text{نمایش دودویی اعداد هستند, } value(x) = value(y)\}$

۱۴. ثابت کنید برای هر زبان منظم L مجموعه‌ی تمام زیررشته‌های غیرمتوالی رشته‌های عضو L تشکیل زبانی منظم می‌دهد.

۱۵. یک ماشین حالت متناهی با n حالت داده شده است. ثابت کنید اگر زبانی که می‌پذیرد نامتناهی باشد، رشته‌ای با طول بین n و $2n$ در زبان وجود دارد.

۱۶. فرض کنید یک ماشین حالت متناهی با n حالت داریم. اگر فقط مجموعه‌ی حالات پذیرش را تغییر دهیم، حداکثر چند زبان مختلف می‌توان تولید کرد؟ چه زمانی دقیقاً به این کران می‌رسیم؟

۱۷. فرض کنید B و C زبان‌هایی روی $\Sigma = \{0, 1\}$ باشند. تعریف کنید

$$B \stackrel{1}{\leftarrow} C = \{w \in B \mid \exists y \in C, n_1(y) = n_1(w)\}$$

که در آن $n_1(z)$ تعداد ۱ها در رشته‌ی z است. نشان دهید زبان‌های منظم تحت عملگر $\stackrel{1}{\leftarrow}$ بسته‌اند.

۱۸. (الف) فرض کنید $\Sigma = \{a, b\}$. برای هر $k \geq 1$ ، فرض کنید C_k زبانی باشد که از همه‌ی رشته‌هایی تشکیل شده است که در آن‌ها یک a دقیقاً در فاصله‌ی k مکان از انتهای راست رشته قرار دارد. بنابراین $C_k = \Sigma^* a \Sigma^{k-1}$. یک ماشین حالت متناهی غیرقطعی با $k+1$ حالت توصیف کنید که C_k را تشخیص دهد.

(ب) زبان‌های C_k را که در مسئله‌ی قبل تعریف شده‌اند در نظر بگیرید. ثابت کنید که برای هر k ، هیچ ماشین حالت متناهی قطعی‌ای نمی‌تواند C_k را با کمتر از 2^k حالت تشخیص دهد.

۱۹. ماشین تورینگی را توصیف کنید که زبان $L = \{a^m b^n c^{m \times n} \mid n, m \geq 1\}$ را می‌پذیرد.

۲۰. ماشین تورینگی را توصیف کنید که زبان $L = \{x_1 \# x_2 \mid x_1, x_2 \in \{0, 1\}^* \wedge x_1 \neq x_2\}$ را می‌پذیرد.