ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۵–۱۴۰۴

مدرس: حمید ضرابی زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری سوم — **استقرای ریاضی** — مبحث آزمون ۱

1. دنباله‌ی $a_1, a_1, \ldots, a_n$ از اعداد طبیعی نه لزوما متمایز داده شده است. مقدار f_i را برابر با تعداد اعداد بزرگ‌تر یا مساوی i در این دنباله تعریف می‌کنیم. ثابت کنید:

$$f_1 + f_2 + \cdots = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

2. برای توان‌های اعداد طبیعی و پایه‌های ناصفر، بسیاری از قوانین آشنای توان را می‌توان با استفاده از دو اصل زیر اثبات کرد:

$$b^0 = 1 \ (b \neq 0), \qquad b^{n+1} = b \cdot b^n.$$

حال فرض کنید m و n اعداد طبیعی و r و s اعداد حقیقی ناصفر باشند. گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $r^{m+n} = r^m r^n$.

ب) $r^{mn} = (r^m)^n$.

ج) اگر $r > 1$، آنگاه $r^m > r^n$ اگر و تنها اگر $m > n$.

د) اگر $n, r, s > 0$، آنگاه $r^n > s^n$ اگر و تنها اگر $r > s$.

3. مجموعه‌ی $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌های S که در آن هیچ دو عدد متوالی‌ای ظاهر نشده برابر است با F_{n+2} که در آن F_n برابر با nامین عدد دنباله‌ی فیبوناچی است.

4. یک n ضلعی غیرمحدب را با استفاده از قطرهایی که یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند (به جز در رأس‌ها) به ناحیه‌های مثلثی تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید تعداد این قطرها برابر با $n - 3$ است.

5. در جمعی n نفر با شرط $n \geqslant 4$ حضور دارند. همچنین می‌دانیم در بین هر ۴ نفر فردی وجود دارد که ۳ نفر دیگر را می‌شناسد. ثابت کنید فردی وجود دارد که تمام افراد این جمع را می‌شناسد. (فرض کنید شناختن یک رابطه‌ی دوطرفه است.)

6. ثابت کنید می‌توان 2^{n+1} عدد 2^n بیتی ساخت که هر دوتایی حداقل در 2^{n-1} رقم متفاوت باشند.

7. مجموعه‌ای از n دایره در صفحه داده شده است. نشان دهید ناحیه‌های ایجادشده توسط این دایره‌ها را می‌توان با دو رنگ چنان رنگ‌آمیزی کرد که ناحیه‌های داری مرز مشترک همرنگ نباشند.

8. به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید می‌توان 7^n دایره به شعاع واحد را درون یک دایره به شعاع 3^n جا داد، به نحوی که هر دو دایره به شعاع واحد حداکثر یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند.

9. در یک ماتریس $m \times n$ از اعداد حقیقی، حداقل p تا ($p \leqslant m$) از بزرگ‌ترین عددها در هر ستون، و حداقل q تا ($q \leqslant n$) از بزرگ‌ترین عددها در هر سطر را نشانه‌گذاری می‌کنیم. ثابت کنید که حداقل pq عدد دوبار نشانه‌گذاری شده اند.

10. می‌دانیم گزاره‌ی $P(n)$ به ازای یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی از اعداد طبیعی درست است. همچنین از درست بودن $P(n+1)$ درستی $P(n)$ نتیجه می‌شود. نشان دهید $P(n)$ به ازای تمام اعداد طبیعی درست است.

11. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی $n \geqslant 7$، نامساوی $n! > n^4$ برقرار است.

۱۲. نشان دهید تعداد نواحی ایجاد شده توسط n خط در صفحه حداکثر برابر است با:

$$\frac{n^{۲}+n+۲}{۲}$$

۱۳. دو نفر با هم بازی می‌کنند. نفر اول ابتدا یک حرف A یا B روی تخته می‌نویسد و در هر مرحله‌ی بعد در نوبت خود یک حرف جدید A یا B به سمت راست کلمه‌ی فعلی اضافه می‌کند. نفر دوم در نوبت خود یا هیچ کاری نمی‌کند، یا جای دو حرف از حروفی که تاکنون نوشته شده است عوض می‌کند. پس از ۲n مرحله بازی پایان می‌یابد. ثابت کنید نفر دوم می‌تواند کاری کند که کلمه‌ی نهایی آیینه‌ای باشد، یعنی از ابتدا و انتها به یک صورت خوانده شود.

۱۴. طول بزرگ‌ترین دنباله از اعداد ۱ تا n را بیابید که هیچ دو عدد مجاوری در آن یکسان نباشد و هیچ زیردنباله‌ای به شکل $x\dots y\dots x\dots y$ نداشته باشد، یعنی دو عدد نباشند که به یک ترتیب یکسان در طول دنباله تکرار شده باشند.

۱۵. برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید که می‌توان هر مربع را به $۳\times۲^{n}-۲$ مربع کوچک‌تر تقسیم کرد، به نحوی که هر خط که با یکی از اضلاع مربع موازی باشد، از حداکثر $n+۱$ تا از این مربع‌های کوچک‌تر عبور کند.

۱۶. یک کارخانه‌ی تولید اسباب‌بازی، توپ‌هایی در k رنگ مختلف تولید می‌کند. این کارخانه برای بسته‌بندی از جعبه‌هایی استفاده می‌کند که در هر یک n توپ جا می‌گیرد. ثابت کنید این کارخانه می‌تواند nk توپ (با تعداد دلخواهی توپ از هر رنگ) را به گونه‌ای در k بسته جا دهد که در هر جعبه، توپ‌ها حداکثر ۲ رنگ مختلف داشته باشند.

۱۷. ثابت کنید به ازای هر $n\geqslant ۲$، مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\dots,۳n\}$ را می‌توان به سه دسته‌ی nتایی افراز کرد به نحوی که مجموع اعداد در هر دسته با دیگر دسته‌ها برابر باشد.

۱۸. نابرابری زیر را برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$\sqrt{۲\sqrt{۳\sqrt{۴\dots\sqrt{(n-۱)\sqrt{n}}}}}<۳$$

۱۹. ثابت کنید به ازای هر مجموعه‌ی $n+۱$ تایی از اعداد صحیح مثبت که از ۲n بزرگ‌تر نیستند، حداقل یک عدد مضرب دیگری است.

۲۰. بازی nim یک بازی دونفره‌ی نوبتی است. در ابتدا k دسته سنگ داریم. در هر نوبت، بازیکنی که نوبت اوست باید یکی از دسته‌ها را انتخاب کند و تعدادی نامنفی از سنگ‌های آن دسته را حذف کند (می‌تواند همه‌ی سنگ‌ها را نیز بردارد). بازیکنی که آخرین سنگ (یا سنگ‌ها) را حذف کند، برنده است. با استفاده از استقرا اثبات کنید اگر xor تعداد سنگ‌های دسته‌ها ناصفر باشد، آنگاه بازیکن اول همواره می‌تواند بازی را ببرد.