ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۵–۱۴۰۴

مدرس: حمید ضرابی زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری چهارم | مجموعه‌ها و توابع | مبحث آزمون ۱

۱. مجموعه‌های $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ از اعداد طبیعی را در نظر بگیرید. می‌دانیم:

$$\forall\, ۱ \leqslant i \leqslant j \leqslant n, \quad |A_i \triangle A_j| = j - i$$

کمینه‌ی مقدار ممکن برای $|A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n|$ را بیابید.

۲. مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۶۳\}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی A که مجموع اعضای آن‌ها کمتر از ۹۵ است، از تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی A که مجموع اعضای آن‌ها بیشتر از ۹۵ است، کمتر است.

۳. فرض کنید f یک تابع صعودی و g یک تابع نزولی از اعداد حقیقی به اعداد حقیقی باشد. صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f \circ g$

ب) $g \circ f$

ج) $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n بار ترکیب)

د) $g \circ g \circ \cdots \circ g$ (n بار ترکیب)

۴. ابتدا ثابت کنید می‌توان در صفحه با مختصات صحیح از نقطه‌ی $(۰, ۰)$ شروع کرد و هر بار از یک نقطه به نقطه‌ی مجاور آن (راست، چپ، بالا یا پایین) رفت و به هر نقطه دقیقاً یک بار رسید. سپس با استفاده از این موضوع و دانسته‌های پیشین خود ثابت کنید $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}|$.

۵. ثابت کنید مجموعه‌ی نقاط یک دایره به قطر ۱ با مجموعه‌ی نقاط صفحه دارای کاردینالیتی برابر است.

۶. ثابت کنید تمام توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند، پوشا هستند:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\big(۲y - f(x)\big) = y + f\big(f(y)\big) - f(x)$$

۷. ثابت کنید $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

۸. ثابت کنید به ازای هر مجموعه‌ی S، تابع پوشایی از S به $\mathcal{P}(S)$ وجود ندارد و نتیجه بگیرید $|S| < |\mathcal{P}(S)|$.

۹. تمام توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad f(xy) + ۵f(xz) \geqslant f(x)f(yz) + ۹$$

۱۰. ثابت کنید اگر مجموعه‌ی نامتناهی A شمارا باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های متناهی A نیز شمارا است.

۱۱. با توجه به تفاضل متقارن و ضرب دکارتی، موارد زیر را اثبات کنید:

الف) $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

ب) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

ج) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

د) $(A \times B) \triangle (C \times D) \supseteq \big((A \cap C) \times (B \triangle D)\big) \cup \big((A \triangle C) \times (B \cap D)\big)$

۱۲. در این ترم به ترتیب ۱۳، ۱۴ و ۱۶ نفر از دوستان ایلیا دروس معماری کامپیوتر، جبر خطی و طراحی الگوریتم را برداشته‌اند. اگر ۶ نفر از دوستان ایلیا هم معماری کامپیوتر و هم جبر خطی، ۴ نفر هم معماری کامپیوتر و هم طراحی الگوریتم، و ۵ نفر هم جبر خطی و هم طراحی الگوریتم را برداشته باشند و ۲ نفر هر سه درس را برداشته باشند، تعداد دوستان ایلیا را بیابید. (تمام دوستان ایلیا حداقل یکی از این سه درس را برداشته‌اند.)

۱۳. اگر داشته باشیم $\overline{A} \cup (B - A) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{(A \cap B)} \cap (A \cap B))$ آنگاه ثابت کنید $A \subseteq B$.

۱۴. ثابت کنید:

الف) ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی شمارا، شمارا است.

ب) اگر n یک عدد طبیعی باشد، ضرب دکارتی n مجموعه‌ی شمارا، شمارا است.

۱۵. فرض کنید توابع f و g از اعداد حقیقی به اعداد حقیقی پوشا و یک‌به‌یک هستند. درباره‌ی پوشایی و یک‌به‌یک بودن هر کدام از توابع زیر چه می‌توان گفت؟ در هر مورد یا اثبات کنید که تابع یک‌به‌یک/پوشا است، یا مثال نقض ارائه دهید.

الف) $f(g(x))$

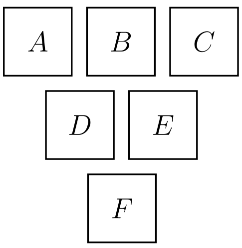
ب) $g(f(x) + ۱۴۰۵)$

ج) $f(x) + g(x)$

د) $f(x)^{۳} + f(x)$

ه) $g(\tan^{-۱}(f(x)))$

۱۶. فرض کنید A, B, C سه مجموعه‌ی دلخواه هستند و طبق شکل زیر از سطر دوم به بعد، هر مجموعه، تفاضل دو مجموعه‌ی بالای آن (سمت چپی منهای سمت راستی) است. برای مثال $D = A - B$. همچنین $\mathcal{P}(A)$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی توانی A است. درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید.



الف) $B \subseteq F$

ب) $F \subseteq A \cap C$

ج) $D \cap C \subseteq F$

د) $\big(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)\big) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

ه) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

و) $|A \cup B| + |A \cup B| = |A| + |B|$

۱۷. فرض کنید S یک مجموعه‌ی n عضوی است. می‌خواهیم همه‌ی زیرمجموعه‌های S را به m دسته افراز کنیم به نحوی که هرگاه $A, B, A \cup B$ در یک دسته باشند، آنگاه $A = B$. حداقل مقدار m را بیابید. (منظور از افراز یک مجموعه به تعدادی دسته این است که هر عضو مجموعه در دقیقاً یک دسته قرار داشته باشد.)

۱۸. تمام توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(f(x)) + y$$

۱۹. مجموعه‌ی ناشمارای S را در نظر بگیرید. اگر یک عضو دلخواه را از این مجموعه حذف کنیم و مجموعه‌ی حاصل را S' بنامیم، ثابت کنید $|S| = |S'|$. (راهنمایی: ابتدا ثابت کنید مجموعه‌ی نامتناهی زیرمجموعه‌ای شمارا و نامتناهی دارد.)

۲۰. تمام توابع $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad f(x + f(x) + ۲y + f(۲z)) = x + f(x) + y + f(y) + ۲f(z)$$