



ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۵-۱۴۰۴

مدرس: حمید ضرابی زاده

مبحث آزمون ۲

نظریه‌ی اعداد

تمرین سری پنجم

۱. روابط بخش‌پذیری را در هر یک از موارد زیر حل کنید:
 - الف) تمام n هایی را بیابید که $2^n + n \mid 8^n + n$.
 - ب) تمام اعداد طبیعی a, b را بیابید که $a^2 + a^3 + 1 \mid a^2b^2 + ab^2 + 1$.
۲. به یک مجموعه از اعداد صحیح مانند S ، بژوت می‌گوییم اگر نسبت به جمع و تفریق بسته باشد؛ یعنی به ازای هر دو عضو (نه لزوماً متمایز) مانند $x, y \in S$ داشته باشیم $x - y \in S$ و همچنین $x + y \in S$.
 - الف) با استفاده از قضیه‌ی بزو، تمام مجموعه‌های بژوت را بیابید.
 - ب) بدون استفاده از قضیه‌ی بزو، تمام مجموعه‌های بژوت را بیابید و از روی شکل این مجموعه‌ها، قضیه‌ی بزو را اثبات کنید.
۳. عدد اول p و عدد طبیعی n در شروط زیر صدق می‌کنند:

$$p \mid n^3 - 1 \quad \text{و} \quad n \mid p - 1.$$
 ثابت کنید $p = n^2 + n + 1$.
۴. اعداد طبیعی و متمایز $a, b, c \leq p$ داده شده‌اند به طوری که p عددی اول است. همچنین می‌دانیم:

$$a^3 \equiv b^3 \equiv c^3 \pmod{p} \quad (\text{به پیمانه‌ی } p).$$
 ثابت کنید که $a + b + c \mid a^2 + b^2 + c^2$.
۵. به مجموعه‌ی $A \subseteq \mathbb{Z}$ خفن می‌گوییم اگر برای هر دو عضو (نه لزوماً متمایز) از آن مانند x و y داشته باشیم که برای هر k صحیح دلخواه، $x^2 + kxy + y^2 \in A$. تمام جفت‌های (m, n) از اعداد طبیعی را بیابید به نحوی که تنها مجموعه‌ی خفن شامل m و n ، مجموعه‌ی \mathbb{Z} باشد.
۶. اعداد a, b, p داده شده است به نحوی که p عددی اول است و $\gcd(a, p) = 1$. ثابت کنید عدد طبیعی n وجود دارد که $p \mid na^n + b$.
۷. دنباله‌ی X_n را به صورت $X_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ تعریف می‌کنیم. تمام اعداد طبیعی d را بیابید که نسبت به همه‌ی جمله‌های این دنباله اول باشند (یعنی $\gcd(d, X_n) = 1$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$).
۸. تابع اویلر که با φ نشان داده می‌شود، به ازای هر عدد طبیعی n ، تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از n و نسبت به n اول را بازمی‌گرداند. حال فرض کنید $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ تجزیه‌ی n به عوامل اول باشد. با استفاده از اصل طرد و شمول نشان دهید:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$
۹. عدد $A = 4444444444$ را در نظر بگیرید. اگر B حاصل جمع ارقام A و C حاصل جمع ارقام B باشد، حاصل جمع ارقام C را بیابید.

۱۰. ثابت کنید دنباله‌ی زیر به پیمانه‌ی عدد اول p متناوب است:

$$1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \dots$$

(اختیاری: طول دوره‌ی تناوب را به طور دقیق محاسبه کنید. در صورت علاقه می‌توانید در مورد ریشه‌ی اولیه به پیمانه‌ی p تحقیق کنید.)

۱۱. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد به نحوی که $n!$ به پیمانه‌ی ۲۵ برابر با ۵ باشد؟

۱۲. تمام زوج‌هایی از اعداد اول مانند (p, q) را بیابید به نحوی که چندجمله‌ای زیر ریشه‌ی صحیح داشته باشد:

$$p(x) = x^2 + px + q$$

۱۳. فرض کنید جمله‌ی اول یک دنباله $a_1 = 1405$ است و جملات بعدی آن با رابطه‌ی $a_{i+1} = 2a_i + 7i$ به ازای هر $i \geq 1$ تعریف می‌شود. باقیمانده‌ی a_{2026} را بر ۱۴ محاسبه کنید.

۱۴. فرض کنید a عددی نابرابر با ۱ باشد. ثابت کنید $a^y - 1 \mid a^x - 1$ اگر و تنها اگر $x \mid y$.

۱۵. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $(n-1)^2 \mid n^n - n^2 + n - 1$.

۱۶. حداکثر چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۴۰۵ می‌توان انتخاب کرد به طوری که جمع هیچ دو عدد از آن‌ها (نه لزوماً متمایز) بر ۷ بخش‌پذیر نباشد؟

۱۷. اعداد طبیعی و فرد x, y, n به گونه‌ای هستند که $2^k \mid x^n + y^n$. ثابت کنید $2^k \mid x + y$.

۱۸. برای هر دو عدد طبیعی متمایز m و n ، نامساوی زیر را ثابت کنید و حالت تساوی را نیز بیابید:

$$\gcd(m, n) + \gcd(m+1, n+1) + \gcd(m+2, n+2) \leq 2|m-n| + 1.$$

۱۹. اعداد طبیعی a و k داده شده است. ثابت کنید بی‌نهایت عدد b وجود دارد به طوری که:

$$a \mid b, \quad a+1 \mid b+1, \quad a+2 \mid b+2, \quad \dots, \quad a+k \mid b+k.$$

۲۰. مجموعه‌ی $S = \{1, 2, \dots, p-1\}$ را در نظر بگیرید که اعضای آن پیمانه‌های عدد اول p هستند. یکی از کاربردهای اعداد اول در عملیات درهم‌سازی (hashing) است، زیرا توابع درهم‌ساز معمولاً توزیع یکنواختی روی پیمانه‌ها ایجاد می‌کنند. هر یک از موارد زیر ثابت کنید تابع f به پیمانه‌ی p پوشا است، یعنی برد تابع تمام اعداد پیمانه‌ی p را تولید می‌کند.

الف) $f(x) = ax + b, x \in S$ و برای هر $\gcd(a, p) = 1$

ب) $f(x) = x^{p-2}, x \in S$