ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۵–۱۴۰۴

مدرس: حمید ضرابی زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری ششم — اصل لانه‌کبوتری — مبحث آزمون ۲

۱. ثابت کنید اگر ۱۰ نقطه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ قرار دهیم، حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصله‌ی آن‌ها از یکدیگر حداکثر $\frac{1}{3}$ است.

۲. در دانشکده تعدادی درس برای دانشجویان ارائه می‌شود. می‌دانیم هر درس توسط حداقل نیمی از دانشجویان برداشته شده است. ثابت کنید دانشجویی وجود دارد که حداقل نیمی از دروس دانشکده را برداشته است.

۳. فرض کنید اعداد ۱ تا ۱۰ به ترتیبی دلخواه روی یک دایره قرار گرفته‌اند. ثابت کنید همواره سه عدد متوالی روی این دایره وجود دارند که حاصل جمع آن‌ها حداقل برابر با ۱۷ است.

۴. نقاط صفحه را با n رنگ، رنگ کرده‌ایم. نشان دهید مستطیلی با رئوس هم‌رنگ وجود دارد.

۵. ۳۳ مهره‌ی رخ در صفحه‌ی شطرنج 8×8 قرار دارند. ثابت کنید می‌توان ۵ رخ از میان آن‌ها انتخاب کرد طوری که همدیگر را تهدید نکنند.

۶. در یک شبکه‌ی $n \times n$ از نقاط، $2n$ نقطه را با رنگ قرمز رنگ کرده‌ایم. نشان دهید بین نقاط قرمز، می‌توان ۴ نقطه را انتخاب کرد طوری که رئوس یک متوازی‌الاضلاع باشند.

۷. نشان دهید در هر $2n$ ضلعی محدب قطری وجود دارد که با هیچ‌یک از اضلاع موازی نیست.

۸. فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n$ دنباله‌ای از n عدد حقیقی باشند و $n = r \times s \times p + 1$. ثابت کنید یا زیردنباله‌ای صعودی به طول $r + 1$، یا زیردنباله‌ای نزولی به طول $s + 1$، یا زیردنباله‌ای ثابت به طول $p + 1$ در این دنباله وجود دارد.

۹. عددهای ۱ تا ۸۱ در یک جدول 9×9 قرار گرفته‌اند. نشان دهید در این جدول دو خانه‌ی مجاور وجود دارد که اختلاف آن‌ها حداقل ۶ است.

۱۰. یک شطرنج‌باز ۷۷ روز برای آماده شدن جهت شرکت در یک تورنومنت فرصت دارد. او می‌خواهد هر روز حداقل یک بازی انجام دهد، ولی در مجموع بیش از ۱۳۲ بازی انجام نمی‌دهد. ثابت کنید دنباله‌ای از روزهای متوالی وجود دارد که او دقیقاً ۲۱ بازی در آن روزها انجام داده باشد.

۱۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد به طوری که در بین هر ۱۰۰ عدد متوالی حداقل یکی از آنها عضو A باشد. ثابت کنید چهار عضو متمایز a, b, c, d در A یافت می‌شوند به طوری که $a+b = c+d$ باشد.

۱۲. در یک مهمانی ۱۵ نفر دور هم جمع شده‌اند و می‌خواهند دور یک میز دایره‌ای بنشینند. دور این میز ۱۵ صندلی وجود دارد، و ۱۵ کارت روی میز قرار دارند که اسامی مهمان‌ها روی آن‌ها نوشته شده است. هنگامی که افراد دور میز می‌نشینند، متوجه می‌شوند که نام کارت روبه‌روی هیچ‌کس با نام خودش یکسان نیست. ثابت کنید اگر این میز قابلیت چرخش داشته باشد، می‌توانیم میز را طوری بچرخانیم که حداقل ۲ نفر پیدا شوند که نام کارت‌های روبه‌رویشان با نام خودشان یکسان باشد.

۱۳. از مجموعه‌ی اعداد $\{1, 2, \ldots, n\}$، به تعداد $2^{n-1} + 1$ زیرمجموعه‌ی متمایز انتخاب کرده‌ایم. نشان دهید دو تا از این زیرمجموعه‌ها وجود دارند که اشتراکشان تهی است.

۱۴. $n+1$ عدد از اعداد ۱ تا $2n$ انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید که بین آن‌ها دو عدد وجود دارند که یکی مضرب دیگری است.

۱۵. نقاط صفحه را با دو رنگ آبی و قرمز، رنگ کرده‌ایم. نشان دهید سه نقطه‌ی هم‌رنگ مانند A، B و C وجود دارند طوری که B وسط پاره‌خط AC است.

۱۶. نشان دهید از بین هر ۱۰ عدد دورقمی متمایز، همواره می‌توان دو زیرمجموعه‌ی مجزا (بدون عضو مشترک) انتخاب کرد، به طوری که مجموع اعداد این دو زیرمجموعه با یکدیگر برابر باشد.

۱۷. در یک جدول 41×5 خانه‌ها با دو رنگ آبی و قرمز رنگ شده‌اند. ثابت کنید سه سطر و سه ستون وجود دارند که تقاطع آنها شامل ۹ خانه‌ی هم‌رنگ است.

۱۸. در یک صفحه‌ی شطرنج 8×8، حداکثر چند مهره‌ی فیل می‌توان قرار داد، به طوری که هیچ دو فیلی یکدیگر را تهدید نکنند؟

۱۹. مجموعه‌ای از $2n+1$ نقطه‌ی دلخواه در صفحه داریم. می‌دانیم بین هر ۳ نقطه‌ی دلخواه از این مجموعه دو نقطه وجود دارد که فاصله‌شان حداکثر ۱ است. ثابت کنید می‌توان دایره‌ای به شعاع ۱ در صفحه رسم کرد به طوری که حداقل نیمی از این نقاط را دربربگیرد.

۲۰. در یک گراف کامل ۱۷ راسی، یال‌ها با سه رنگ آبی، قرمز و سبز رنگ‌آمیزی شده‌اند. ثابت کنید در این گراف یک مثلث شامل یال‌های هم‌رنگ وجود دارد.