ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۵–۱۴۰۴

مدرس: حمید ضرابی زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری هفتم | رابطه‌های بازگشتی و توابع مولد | مبحث آزمون ۲

۱. فرض کنید T_n برابر با تعداد رشته‌های n حرفی از حروف a، b و c باشد به طوری که در هر ۳ حرف مجاور حداقل یک a وجود داشته باشد. یک رابطه‌ی بازگشتی برای T_n ارائه دهید.

۲. تعداد کلمات تشکیل شده تنها از a، b و c را بیابید که تعداد فردی a در آن باشد.

۳. فرض کنید C_n برابر با تعداد پرانتزگذاری‌های معتبر به طول $۲n$ باشد. یک رابطه‌ی بازگشتی برای C_n ارائه دهید. یک دنباله از پرانتزهای باز و بسته معتبر است، اگر در هر پیشوند از این دنباله، تعداد پرانتزهای باز کم‌تر از تعداد پرانتزهای بسته نباشد.

۴. فرض کنید D_n برابر با تعداد پریش‌های اعداد ۱ تا n باشد. یک رابطه‌ی بازگشتی برای D_n بیابید.

۵. یک رابطه‌ی بازگشتی برای تعداد روش‌های افراز اعداد ۱ تا n به زیرمجموعه‌های ناتهی ارائه دهید.

۶. فرض کنید f_n برابر با تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی رئوس یک nضلعی با k رنگ باشد به طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند. یک رابطه‌ی بازگشتی برای f_n بیابید.

۷. فرض کنید $s(n,k)$ برابر با تعداد جایگشت‌های مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,n\}$ باشد که شامل دقیقاً k دور است. برای تشکیل یک دور در یک جایگشت π، ابتدا از یک عدد i به عدد $\pi(i)$ می‌رویم، سپس از $\pi(i)$ به $\pi(\pi(i))$ و به همین ترتیب تا مجددا به عدد i برسیم. یک رابطه‌ی بازگشتی برای $s(n,k)$ (که به عدد استرلینگ نوع اول نیز معروف است) به دست آورید.

۸. مسئله‌ی ژوزفوس به صورت زیر تعریف می‌شود: فرض کنید n نفر دور یک دایره ایستاده‌اند و با شروع از نفر اول در جهت ساعت‌گرد، هر کس اولین نفر پس از خود را که هنوز دور دایره است، از دور دایره بیرون می‌اندازد. اگر شماره‌ی نفری که در نهایت دور دایره باقی می‌ماند را با J_n نمایش دهیم، یک رابطه‌ی بازگشتی برای J_n ارائه دهید.

۹. تعداد پاسخ‌های معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۵$ با شروط زیر را با استفاده از توابع مولد به دست آورید.

$$x_۱ \in \{۱,۲,۵\},\quad x_۲ \in \{۰,۳,۴,۶\},\quad x_۳ \in \{۴,۱۰\}$$

۱۰. فرض کنید یک محیط کشت آزمایشگاهی در ابتدا خالی از باکتری است. روند رشد جمعیت در هر ساعت تابع قوانین زیر است:

- جمعیت موجود باکتری‌ها سه برابر می‌شود (تکثیر داخلی).
- سپس ۱ میلیون باکتری جدید از محیط بیرون به مجموعه اضافه می‌شود.

اگر a_n نشان‌دهنده‌ی تعداد باکتری‌ها (به میلیون) پس از n ساعت باشد، رابطه‌ی بازگشتی آن را بنویسید و با استفاده از توابع مولد، فرمول بسته‌ی a_n را محاسبه کنید.

۱۱. تعداد روش‌های افراز یک مجموعه‌ی n عضوی به دقیقاً k زیرمجموعه‌ی ناتهی را با $S(n,k)$ نشان می‌دهیم. یک رابطه‌ی بازگشتی برای آن ارائه دهید.

۱۲. الف) فرض کنید f_n برابر با تعداد دنباله‌های n حرفی از حروف a و b باشد به طوری که زیردنباله‌های aba یا bab در آن‌ها دیده نشود. یک رابطه‌ی بازگشتی برای f_n ارائه دهید.

ب) فرض کنید g_n برابر با تعداد دنباله‌های n رقمی از ارقام ۰ و ۱ باشد به طوری که دو رقم ۱ متوالی نداشته باشد.یک رابطه‌ی بازگشتی برای g_n ارائه دهید.

ج) f_n را بر حسب g_n بازنویسی کنید.

۱۳. تعداد کلمات تشکیل شده از حروف a و b را بیابید که شامل تعداد فردی a و تعداد زوجی b باشد.

۱۴. فرض کنید f_n نشان‌دهنده‌ی تعداد رشته‌های به طول n متشکل از حروف a، b و c باشد که شامل زیررشته‌ی ab نیستند. یک رابطه‌ی بازگشتی برای f_n بیابید.

۱۵. فرض کنید f_n برابر با تعداد روش‌هایی باشد که بتوان یک nضلعی محدب را با رسم قطرهایش مثلث‌بندی کرد. یک رابطه‌ی بازگشتی برای f_n ارائه دهید.

۱۶. فرض کنید f_n برابر با تعداد دنباله‌های به طول n از ارقام ۰، ۱ و ۲ باشد به طوری که اختلاف هر دو عضو مجاور حداکثر ۱ باشد. یک رابطه‌ی بازگشتی برای f_n ارائه دهید.

۱۷. فرض کنید $f(n, k)$ برابر با تعداد جایگشت‌هایی مانند p از اعداد ۱ تا n باشد به طوری که دقیقاً شامل k صعود باشد، یعنی دقیقاً k اندیس مانند i وجود داشته باشد که $p_i < p_{i+1}$. یک رابطه‌ی بازگشتی برای $f(n, k)$ ارائه دهید.

۱۸. فرض کنید a_n تعداد ماتریس‌های متقارن $n \times n$ با درایه‌های ۰ و ۱ باشد به طوری که در هر سطر آن‌ها دقیقا یک درایه‌ی ۱ وجود داشته باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۱۹. تابع مولد دنباله‌ی زیر را به دست آورید:

$$\begin{cases} a_n = ۲a_{n-۱} + ۳n - ۱ \\ a_۰ = ۱ \end{cases}$$

۲۰. با داشتن سکه‌های ۱، ۲، ۵ و ۱۰ تومانی می‌خواهیم n تومان را پرداخت کنیم. به کمک توابع مولد و بدون در نظر گرفتن ترتیب، در هر کدام از شرایط زیر تعداد حالات ممکن را محاسبه کنید.

الف) تعداد سکه‌های ۲ تومانی دو برابر سکه‌های ۱ تومانی باشد.

ب) تنها از سکه‌های ۱ تومانی و ۲ تومانی استفاده کنیم، ولی تعداد سکه‌های استفاده شده زوج باشد.