۱. مجموعه‌ی P_1 را مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته و صعودی، و مجموعه‌ی P_2 را مجموعه‌ی تمام چندجمله‌ای‌ها روی اعداد حقیقی می‌نامیم. رابطه‌ی R را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$f_1 \, R \, f_2 \iff \forall n \in \mathbb{N} \, \exists x \geqslant n : f_1(x) \leqslant f_2(x)$$

الف) آیا R روی P_1 یک ترتیب جزئی است؟

ب) ثابت کنید R روی P_2 یک ترتیب کامل است.

۲. ثابت کنید رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی A ترایایی است اگر و تنها اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $R^n \subseteq R$.

۳. فرض کنید R یک رابطه روی مجموعه‌ی A است. اگر $|A| = n$، آن گاه نشان دهید رابطه‌ی زیر یک رابطه‌ی ترایایی است.

$$R^+ = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

۴. فرض کنید A یک مجموعه‌ی ناتهی است و R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی A است. نشان دهید تابعی مانند f با دامنه‌ی A وجود دارد که شرط زیر را برآورده کند:

$$\forall x, y \in A : \quad (x, y) \in R \iff f(x) = f(y).$$

۵. کدام یک از روابط زیر روی $\mathbb{R}$ تشکیل یک رابطه‌ی هم‌ارزی می‌دهند؟

الف) $x \, R \, y \iff x - y \in \mathbb{Z}$

ب) $x \, R \, y \iff x - y \in \mathbb{Q}$

پ) $x \, R \, y \iff x - y \in \overline{\mathbb{Q}}$

۶. فرض کنید L یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر متناهی باشد. ثابت کنید هر عضو $a \in L$ را می‌توان (صرف‌نظر از ترتیب) به‌طور یکتا به صورت $a = j_1 \vee j_2 \vee \cdots \vee j_n$ نوشت، به طوری که:

الف) هر j_i یک عنصر اجتماع‌ناپذیر است؛ یعنی هیچ $x, y \in L$ وجود ندارند که $j_i = x \vee y$ و $x \neq j_i$ و $y \neq j_i$.

ب) این نمایش کاهش‌ناپذیر است، یعنی حذف هیچ‌یک از j_iها مقدار اجتماع را تغییر نمی‌دهد.

۷. ثابت کنید هر زیرمجموعه‌ی ناتهی و متناهی از یک مشبکه، دارای یک بالاترین کران پایین و یک پایین‌ترین کران بالا است.

۸. به مشبکه‌ی M مدولار (modular) می‌گوییم، هرگاه برای هر $a \leqslant c$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

الف) ثابت کنید هر مشبکه‌ی توزیع‌پذیر، مدولار است.

ب) یک مشبکه‌ی غیر توزیع‌پذیر مدولار مثال بزنید.

۹. فرض کنید A یک مجموعه‌ی شمارا باشد. ثابت کنید رابطه‌ی R روی A وجود دارد که:

الف) ترتیب کامل باشد.

ب) ترتیب کامل نباشد، اما مشبکه باشد.

۱۰. مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد طبیعی n را با D_n نشان می‌دهیم. تمام nهایی را بیابید که D_n با رابطه‌ی بخش‌پذیری جبر بول باشد.

۱۱. مجموعه‌ی S را با $|S| = n$ در نظر بگیرید. برای هر یک از موارد زیر، تعداد کل رابطه‌های R روی S که دارای ویژگی گفته شده هستند را پیدا کنید:

الف) به ازای هر عضو x، زوج (x,x) در R نباشد (ویژگی پادبازتابی).

ب) دست‌کم یک عضو x وجود داشته باشد که (x,x) در R نباشد (ویژگی غیربازتابی).

پ) رابطه‌ی R هم بازتابی باشد و هم متقارن.

ت) رابطه‌ی R نه بازتابی باشد و نه پادبازتابی.

۱۲. فرض کنید R یک رابطه روی مجموعه‌ی A باشد. نشان دهید:

الف) اگر R بازتابی باشد، آنگاه R^n برای هر $n \in \mathbb{N}$ بازتابی خواهد بود.

ب) اگر R متقارن باشد، آنگاه R^n برای هر $n \in \mathbb{N}$ متقارن خواهد بود.

پ) اگر R پادبازتابی باشد، آیا لزوماً $R^۲$ نیز پادبازتابی است؟

۱۳. فرض کنید رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی تمام رنگ‌آمیزی‌های یک مربع ۲ × ۲ با رنگ‌های سیاه و سفید به این صورت تعریف شده است که $(C_۱, C_۲) \in R$ اگر و تنها اگر بتوان با شروع از $C_۱$ و با اعمال یک چرخش، یا یک چرخش به همراه قرینه کردن (نسبت به خطوط تقارن مربع)، به حالت $C_۲$ رسید.

الف) نشان دهید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

ب) کلاس‌های هم‌ارزی R را مشخص کنید.

۱۴. نشان دهید در هر مجموعه‌ی مرتب جزئی که دارای بزرگ‌ترین عضو است، دقیقاً یک عضو ماکزیمال وجود دارد.

۱۵. برای هر یک از موارد زیر یک مشبکه مثال بزنید:

الف) متمم‌دار باشد اما توزیع‌پذیر نباشد.

ب) توزیع‌پذیر باشد اما متمم‌دار نباشد.

۱۶. نشان دهید که قوانین توزیع‌پذیری «ضعیف» زیر برای هر مشبکه‌ی L برقرارند:

الف) $a \vee (b \wedge c) \ \leqslant\ (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

ب) $a \wedge (b \vee c) \ \geqslant\ (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

۱۷. به یک مشبکه کامل می‌گوییم، اگر هر زیرمجموعه‌ی ناتهی آن کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین داشته باشد. به موارد زیر پاسخ دهید:

الف) مجموعه اعداد طبیعی با رابطه‌ی بخش‌پذیری یک مشبکه کامل نیست.

ب) هر مشبکه‌ی متناهی کامل است.

پ) یک مشبکه‌ی کامل با تعداد نامتناهی عضو مثال بزنید.

۱۸. دو مجموعه‌ی مرتب جزئی $(A, \preccurlyeq_۱)$ و $(B, \preccurlyeq_۲)$ را در نظر بگیرید. رابطه‌ی $\preccurlyeq$ روی $A \times B$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a, b) \preccurlyeq (a', b') \iff a \preccurlyeq_۱ a' \ \wedge \ b \preccurlyeq_۲ b'$$

در این صورت $\preccurlyeq$ را ضرب دو رابطه‌ی $\preccurlyeq_۱$ و $\preccurlyeq_۲$ می‌نامیم.

الف) نشان دهید $(A \times B, \preccurlyeq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است.

ب) نشان دهید اگر $(A, \preccurlyeq_۱)$ و $(A \times B, \preccurlyeq)$ مشبکه باشند، آنگاه $(B, \preccurlyeq_۲)$ نیز یک مشبکه است.

پ) اگر $(A, \preccurlyeq_۱)$ و $(B, \preccurlyeq_۲)$ ترتیب کامل باشند، آیا $(A \times B, \preccurlyeq)$ نیز یک ترتیب کامل است؟ برعکس آن چطور؟

۱۹. فرض کنید I مجموعه‌ی تمام بازه‌های بسته روی اعداد حقیقی باشد. ثابت کنید رابطه‌ای مانند R روی I وجود دارد که:

الف) مشبکه باشد.

ب) مشبکه نباشد، اما ترتیب جزئی باشد.

۲۰. ثابت کنید در یک جبر بول موارد زیر با هم معادل‌اند:

الف) $a + b = b$

ب) $ab = a$

پ) $a' + b = ۱$

ت) $ab' = ۰$