



ساختارهای گسسته

نیم سال دوم ۱۴۰۵-۱۴۰۴

مدرس: حمید ضرابی زاده

تمرین سری نهم

نظریه ی گراف ها

مبحث آزمون ۳

۱. جدولی $(2n+1) \times (2n+1)$ داریم. می خواهیم روی تعدادی از اضلاع بین خانه ها در ایجاد کنیم به طوری که تعداد درهای اطراف هر خانه برابر ۲ باشد. آیا چنین کاری ممکن است؟
۲. ثابت کنید در هر گراف ساده ی همبند، اگر درجه ی هر رأس حداقل k باشد، آنگاه گراف دارای مسیری به طول حداقل $\min(2k, n-1)$ است.
۳. ثابت کنید در هر گراف ساده، می توان یال ها را طوری جهت دار کرد که اختلاف درجه ی ورودی و خروجی هر رأس حداکثر یک باشد.
۴. برای هر گراف G با n رأس ثابت کنید:

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

۵. به ازای هر گراف G با n رأس ثابت کنید:

$$\frac{n}{\alpha} \leq \chi(G) \leq n - \alpha + 1,$$

که در آن α برابر با اندازه ی بزرگ ترین مجموعه ی مستقل در G است.

۶. گرافی همبند داریم که هیچ زیرگراف القایی به شکل مربع (دور به طول ۴) یا مسیر به طول ۳ (دارای ۳ یال) ندارد. ثابت کنید این گراف رأسی با درجه $n-1$ دارد.
۷. نشان دهید که گراف همبند مسطح G دورنگ پذیر وجهی است اگر و تنها اگر G اویلری باشد. (منظور از دورنگ پذیر وجهی این است که بتوان وجه های گراف مسطح را با دو رنگ طوری رنگ آمیزی کرد که هر دو وجه با یال مشترک هم رنگ نباشند).
۸. گرافی ۱۴۰۵ راسی داریم که رأس برشی ندارد. در هر مرحله یک دور از گراف را انتخاب می کنیم و یال های آن را حذف می کنیم و یک رأس به گراف اضافه می کنیم و بین این رأس و تمام رئوس آن دور یال رسم می کنیم. بعد از تعدادی عملیات به گرافی رسیده ایم که هیچ دوری ندارد. ثابت کنید گراف نهایی، حداقل ۱۴۰۵ رأس با درجه ی یک دارد.
۹. رأس پادشاه در یک گراف جهت دار به راسی گفته می شود که از همه ی رئوس دیگر گراف با مسیری به طول حداکثر ۲ قابل دستیابی است.

(الف) ثابت کنید هر تورنمنت حداقل یک پادشاه دارد.

- (ب) ثابت کنید اگر یک تورنمنت رأس با درجه ی ورودی یا خروجی $n-1$ نداشته باشد، حداقل دو پادشاه دارد.

۱۰. ثابت کنید به ازای هر سه رأس دلخواه u, v, w از گراف مسطح G رابطه ی زیر برقرار است:

$$\deg(u) + \deg(v) + \deg(w) \leq 2n + 2.$$

۱۱. قرار است به n نفر، n خانه اختصاص داده شود. هر فرد در یک لیست، یک رتبه‌بندی از این خانه‌ها را مشخص می‌کند. بعد از اختصاص دادن خانه‌ها به این n نفر مشخص شد که برای هر روش اختصاص دیگر، فردی وجود دارد که به خانه‌ای با رتبه‌ی پایین‌تر (بر اساس رتبه‌بندی خود آن فرد) می‌رسد (یعنی متضرر می‌شود). ثابت کنید فردی وجود دارد که خانه‌ای که به او اختصاص یافته است، متعلق به رتبه‌ی اول لیست او بوده است.

۱۲. هر یک از رئوس گراف $n!$ رأسی G نماینده‌ی یک جایگشت از اعداد ۱ تا n است. دو رأس را در این گراف به هم وصل می‌کنیم اگر با یک جابجایی دو جایگاه مجاور به یکدیگر تبدیل شوند.

(الف) ثابت کنید این گراف همبند است.

(ب) ثابت کنید این گراف دوبخشی است.

۱۳. گرافی که با مکمل خود یکرخت باشد، خودمکمل نامیده می‌شود.

(الف) ثابت کنید در هر گراف خودمکمل تعداد رئوس به پیمانه‌ی ۴ برابر ۰ یا ۱ است.

(ب) یک گراف خودمکمل با $4k + 1$ رأس داریم. ثابت کنید رأسی وجود دارد که درجه‌ی آن برابر $2k$ باشد.

۱۴. فرض کنید T درختی با $2n$ رأس باشد. ثابت کنید T دقیقاً یک زیرگراف فراگیر دارد که درجه‌ی هر رأس آن فرد است.

۱۵. به ازای هر یال e در گراف ساده‌ی G ثابت کنید یال e برشی است اگر و تنها اگر عضو هیچ دوری نباشد.

۱۶. فرض کنید گراف G حداکثر Δ رأس با درجه‌ی Δ داشته باشد. ثابت کنید: $\chi \leq \Delta$.

۱۷. (الف) ثابت کنید می‌توان یک زیرگراف فراگیر دوبخشی از گراف ساده‌ی G انتخاب کرد به طوری که حداقل نیمی از یال‌های گراف اصلی را داشته باشد.

(ب) به ازای هر گراف ساده‌ی G ثابت کنید زیرگراف فراگیر r -بخشی H از G وجود دارد به طوری که برای هر رأس v رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\deg_H(v) \geq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \deg_G(v)$$

۱۸. ثابت کنید گراف G با میانگین درجه‌ی رئوس d ، زیرگرافی دارد که در آن درجه‌ی هر رأس حداقل $\frac{d}{4}$ است.

۱۹. فرض کنید دنباله‌ی $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ دنباله‌ی درجه‌های گراف ساده‌ی G باشد به طوری که

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n \quad \text{و} \quad \forall k \leq n - d_n - 1 : \quad k \leq d_k.$$

ثابت کنید گراف G همبند است.

۲۰. نشان دهید اگر گراف همبند G هیچ زیرگراف القائی به شکل مثلث یا مسیر به طول ۳ نداشته باشد، آن‌گاه G دوبخشی کامل است.