

سوال 3: می خواهم از اعداد $1, 2, \dots, n$ 4 عدد x_1, x_2, x_3, x_4 انتخاب کنم. فرض می کنم فاصله بین عددهای این ترتیب خواهر بود: $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < n+1$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 0 - 1 = x_1 - 1 & 0 \leq y_1 \\ y_2 = x_2 - x_1 - 1 & 1 \leq y_2 \\ y_3 = x_3 - x_2 - 1 & 1 \leq y_3 \\ y_4 = x_4 - x_3 - 1 & 1 \leq y_4 \\ y_5 = n + 1 - x_4 - 1 = n - x_4 & 0 \leq y_5 \end{cases} \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = n - 4$$

پس جواب به این ترتیب خواهر بود:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^2 (x + x^2 + x^3 + \dots)^3 = \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{x^3}{(1-x)^3} = \frac{x^3}{(1-x)^5}$$

بسیار ساده و زیاده

پس طبق:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+t-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^t}$$

$$\frac{x^3}{(1-x)^5} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k = \binom{n-3}{n-7} = \binom{n-3}{4}$$